EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE WISKUNDE

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL
EN VAN DE WISKUNDE-WERKGROEP VAN DE W.V.O.

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

40e JAARGANG 1964/1965

III—1 NOVEMBER 1964

INHOUD

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN

Het tijdschrift **Euclides** verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang *f* 8,75; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs *f* 7,50.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. Het abonnementsgeld is begrepen in de contributie. Het verenigingsjaar begint op 1 september.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven aan de Penningmeester van Liwenagel te Amersfoort.

Hetzelfde geldt voor de leden van de *Wiskunde-werkgroep van de W.V.O.* Zij kunnen zich wenden tot de penningmeester van de Wiskunde-werkgroep W.V.O. te Haarlem.

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender" in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan Drs. A. M. Koldijk, Joh. de Wittlaan 14 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

ON ANCIENT CHINESE MATHEMATICS*

by

Prof. Dr. D. J. Struik

Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts

I

Those wishing to obtain information on ancient Chinese mathematics, and ignorant of the language, have always been handicapped by the scarcity of sources of information. Most of our knowledge had to be gathered from one book, by the Japanese mathematician Yoshio Mikami, published in 1913 and written in English [1]). Information could also be had from some general histories of mathematics, notably the *History of Mathematics* (1923, 25) by D. E. Smith, who had the benefit of Chinese collaborators [2]). There also existed special papers, of which that of Biernatzki was one of the oldest (1856) [3]), and among which the articles by the missionary L. van Hée stood out [4]).

This situation has now been changed for the better by the appearance of the third volume of Professor Needham's *Science and Civilization of China*, which contains, in 168 pages, a new detailed survey and analysis of ancient Chinese mathematics written with the collaboration of Dr. L. Wang [5]). Those who can find their way in a Russian text are able to consult also a complete translation of the most important of the older books, the so-called *Nine Chapters* [6]). It is gratifying to notice that this new material does not substantially change the picture as Mikami has drawn it, but it helps us in getting a firmer grasp of the essentials of ancient Chinese mathematics. We hope to point out some of these essentials in the present paper; those who are further interested should consult Mikami and Needham.

A first orientation is facilitated by the division of Chinese history prior to 1644 into two parts:

---

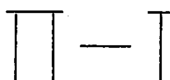
*) Met toestemming van de uitgever van The Mathematics Teacher en van de auteur. De inhoud van dit artikel stemt in hoofdzaak overeen met de inhoud van een voordracht door Prof. Struik op 3 januari 1964 gehouden in de bijeenkomst van het Wiskundig Genootschap te Rotterdam.

1. The period culminating in the unified empire under the Han (202 B.C.–220 A.D.), with the preceding feudal Chou period (*c.* 1030 B.C.–221 B.C.) and the following period of division until *c.* 600 A.D.
2. The period starting with the newly unified China under the Thang (618—906), followed by the Five Dynasties and the Independent States (907—960), the Sung (960—1279), the Yuan (1260—1368), and the Ming (1368—1644), these last three all ruling over a united China. European influence and mathematics begin under the Ming with the advent of the Jesuits.

Confucius lived in the Chou period (*c.* 500 B.C.). The Han period partly coincides with the Roman empire at its height, and it was under the Han that Buddhism came to China. The Yuan were a Mongol dynasty ("the Great Khan", as the emperor was called in Europe) under which China became somewhat better known to Europe, Marco Polo traveled in China, and Kubla Khan, in Xanadu, according to the poet Coleridge, did "a stately pleasure-dome decree."

II

Chinese numeration has always been decimal [7]), and already in pre-Chou days we find numbers expressed with nine symbols and with place value. The system was established under the Han, or even before. The nine numerals were expressed by arrangements of bamboo sticks, so that, for instance, 716 appeared as



and was also written this way. The elementary operations were carried out on counting boards, with blanks where we put zeros. There was no objection to fractions, though they were for a long time written out in words. In metrology we find at an early age what amounts to decimal fractions, but each decimal had its own name —for instance 1 chhih was 10 tshun, and 1 tshun was 10 fen—just as we implicitly use the duodecimal system when we speak of 6 feet 5 inches.

The Chinese abacus, the *suan phan*, that we know so well in the U.S.A., is first mentioned in 1436, but may be much older [8]).

From the Han period dates what is perhaps the most important text of all ancient Chinese mathematics, the already mentioned

Nine Chapters, or *Chiu Chang Suan Ching* [9]). There is still another famous classic of the same period, the *Chou Pei* [10]), but it contains mathematical material only in part, and the content is much more archaic than that of the *Nine Chapters*. We have no definite date for the composition of either book; we can only say that the oldest texts in existence can be traced to the Han period. Both books may well contain material much older than the Han.

The *Chou Pei* is of interest to the mathematician mainly because it has a discussion (but no proof) of the theorem of Pythagoras, illustrated by the famous diagram given in Figure 1 (here drawn for 3, 4, 5, but obviously valid for all Pythagorean triplets). The *Nine Chapters*, however, deserves ampler discussion, since the book

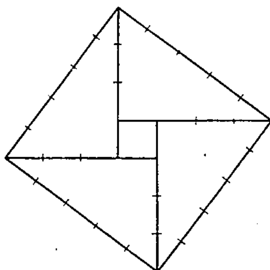


Fig. 1

sets a pattern for almost the whole further development of Chinese mathematics before European influence, under the Ming, begins to be felt in essentials. It sets the pattern both in content and form: in content by its arithmetical-algebraic-computational approach, in form by its presentation of the material as a collection of problems leading to algebraic equations with numerical coefficients. There are rules for operation, but no proofs in the Greek sense.

We illustrate the character of the *Nine Chapters* by a few examples.

Chapter I, No. 1. Given a field of width 15 pu and length 16 pu. Question: What is the area of the field? Answer: 1 mu.

[A pu is a (double) pace; 1 mu = 240 square pu. Many numerical problems follow, dealing with addition, subtraction, multiplication, and division. Often fractions are involved. From time to time a "rule" is given explaining the operation. An instance of a more complicated problem of this kind is our next example.]

Chapter IV, No. 11. Given a field of width 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{11}$, and $\frac{1}{12}$ pu. It is known that the area of the field is 1 mu. Question: What is the length of the field? Answer: $77\frac{29183}{86021}$ pu.

[This means that the width of the field is $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{12}$ pu. This problem is preceded by others in which 240 is divided successively by $1 + \frac{1}{2}$, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \ldots$, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{11}$.]

Chapter IV, No. 14. Given a square field of 71824 square pu. Question: What is the side of the square? Answer: 268 pu.

Chapter IV, No. 15. Given another square field of $564752\frac{1}{4}$ square pu. Question: What is the side of the square? Answer: $751\frac{1}{2}$ pu.

[When $\sqrt{(m/n)}$ had to be taken, $\sqrt{(mn/n^2)} = (1/n)\sqrt{(mn)}$ was computed; for $\sqrt[3]{(m/n)}$ the expression $(1/n)\sqrt[3]{(mn^2)}$ was computed [11].]

Chapter IV, No. 19. Given a cube of 1860867 chhih. Question: What is the side of the cube? Answer: 123 chhih.

[This, and the two preceding examples, are examples of equations of the form $x^2 = a$, $x^3 = b$. We return later to the rule given to obtain the solutions.]

Chapter I, No. 36. Given another field in the form of a segment of a circle, the base of which is $78\frac{1}{2}$ pu, the sagitta $13\frac{7}{9}$ pu. Question: What is the area? Answer: 2 mu $155\frac{56}{81}$ square pu.

[This means that when a is the base (chord) and b the sagitta, the area is $(\frac{b}{2})(a + b)$; $(\frac{62}{9})(\frac{124}{9} + \frac{157}{2}) = 635\frac{56}{81}$. For half the circle, for which $2b = a$, this formula gives $(\frac{3}{2})b^2$, or $\pi = 3$, the approximation for π adopted in the *Nine Chapters*. The formula expresses the approximation of a segment of a circle by a trapezoid, as indicated in Figure 2.

Many problems deal with areas and volumes; sometimes the formulas underlying the answers are accurate, and sometimes approximate.]

Chapter IX, No. 11. Given a door of which the height is larger

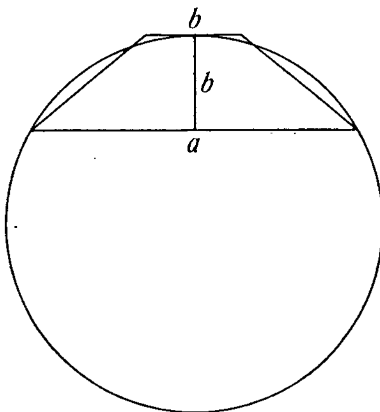


Fig. 2.

than the width by 6 chhih 8 tshun. The maximum distance between the vertices is 1 chang. Question: What are the height and width of the door? Answer: The width is 2 chhih 8 tshun; the height is 9 chhih 6 tshun.

[This is the first appearance of a quadratic equation other than $x^2 = a$, and it is based on the theorem of Pythagoras. Since 1 chhih = 10 tshun, and 1 chang = 10 chhih, we have here an example of how decimal fractions were expressed in the *Nine Chapters*. The problem is expressed by the equations $x^2 + y^2 = c^2 = 100$, $y - x = k = 6.8$. The rule says that we must take $x = z - k/2$ $y = z + k/2$, then $z^2 + (k/2)^2 = c^2/2$ and $z = \sqrt{[c^2/2 - (k/2)^2]}$, and the solutions are $\pm k/2 + z$. Indeed, $(2.8)^2 + (9.6)^2 = 100$. Problem No. 20 in Chapter IX leads to the equation $x^2 + 34x - 71000 = 0$, with answer $x = 250$; only the positive root being given, since a length is required.]

Chapter VIII, No. 1. Three sheafs of good crop, 2 sheafs of mediocre crop, and 1 sheaf of bad crop are sold for 39 dou [12]). Two sheafs of good, 3 of mediocre, and 1 of bad are sold for 34 dou. One sheaf of good, 2 of mediocre, and 3 of bad are sold for 26 dou. Question: What is the price received for a sheaf of good crop, mediocre crop, and bad crop? Answer: For one sheaf of good crop, $9\frac{1}{4}$ dou; for one sheaf of mediocre crop, $4\frac{1}{4}$ dou; for one sheaf of bad crop, $2\frac{3}{4}$ dou.

[This problem is equivalent to that of solving a system of three simultaneous linear equations. It was solved by a rule typical of Chinese mathematics, not only of the Han period, but also of later periods. This rule is essentially what we now call a matrix method, as follows.

Given the simultaneous system of linear equations

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 39, \\ 2x + 3y + z &= 34, \\ x + 2y + 3z &= 26, \end{aligned}$$

the rule (chih chhu) says: Write down the "matrix"

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{bmatrix} \begin{matrix} x \\ y \\ z \\ \end{matrix}$$

with an "x-row", a "y-row", and a "z-row" [13]), and a row of the constant terms. Now operate on the columns as follows:

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 9 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 26 & 102 & 39 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 26 & 63 & 39 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 24 & 39 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 36 & 1 & 1 \\ 99 & 24 & 39 \end{bmatrix}$$

The operations on the matrices are equivalent to those we use on the equations in order to get the final result $36z = 99$, $5y + z = 24$, $3x + 2y + z = 39$, from which the answer follows.]

The first problem of Chapter VIII is followed by a set of similar problems, all leading to simultaneous systems of linear equations. In Problem No. 3, which leads to $2x = 1 - y$, $3y = 1 - z$, $4z = 1 - x$, we meet negative numbers in the intermediate computation. The rule that follows this problem teaches how to work with positive (cheng) and negative (fu) numbers, e.g., $a - (-b) = a + b$, etc. The Chinese text uses words, not symbols. The cheng are represented by red, and the fu by black, counting rods. This is the first occurrence of negative numbers in the literature of mathematics.

We now come to the years after the Han. Here, in a book by the mathematician Sun Tzu (who lived at some time between 280 and 476), and which contains much material of the same nature as we find in the *Nine Chapters*, we meet the first problem in indeterminate analysis. It is as follows: "Now there are things of an unknown number which divided by 3 leave 2, by 5 leave 3, and by 7 leave 2. What is the number? (Give the smallest answer.)"

Sun Tzu's reasoning, which leads to $233 - 210 = 23$, is not very clear. We can express the solution in modern notation as follows:

Find a number N such that $N \equiv a_1 \pmod{m_1} \equiv a_2 \pmod{m_2} \equiv a_3 \pmod{m_3}$, with $m_1 = 3$, $m_2 = 5$, $m_3 = 7$, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 2$. In Sun Tzu's case, the m_i are relatively prime in pairs. In such a case, let $m = m_1 m_2 m_3$. Then find numbers $p_i \equiv 0 \pmod{m/m_i}$, $p_i \equiv 1 \pmod{m_i}$, and the solution is $N = a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 \pmod{m}$. In Sun Tzu's case, $p_1 = 70$, $p_2 = 21$, $p_3 = 15$, and $N = (2)(70) + (3)(21) + (2)(15) = 233 \pmod{70}$. Sun Tzu has only the smallest number, which is 23 [14]).

To the same post-Han period belong mathematicians who paid careful attention to the ratio of diameter and circumference of a circle. As we have seen, the traditional value of π was 3, but under the Han we also meet $\pi = \sqrt{10} = 3.162 \cdots$. A general by the name of Wang Fan, of the third century A.D., has been reported as the man who found $\pi = 142/45$, which gives $\pi = 3.155$. We are better informed about his contemporary Liu Hui, the author of

an extant short commentary on the *Nine Chapters*, with the date 263 A.D., called the *Sea Island Mathematical Manual* [28]). It contains some new material on measuring. In it Liu Hui gives an account of his way of measuring the circle. Starting with a hexagon of side 1, he computes the side of the regular polygon of 12 sides by twice using the Pythagorean theorem. Then he repeats the process, arriving successively at polygons with 24, 48, 96, 192 sides. He gets for the area of the inscribed regular 192-gon the value $3.14\frac{64}{625}$. He also obtains a higher value, which is $3.14\frac{169}{625}$. This gives

$$3.1410 < \pi < 3.1427.$$

Two centuries after Liu Hui we find Tsu Chhung-Chih (430–501) and his son [15]), whose book has been lost, but of which enough of the content has been preserved to give us the information that they found

$$3.1415926 < \pi < 3.1415927,$$

and also the somewhat less precise values, $\pi = 22/7$ (called the "inaccurate" one) and $\pi = 355/113$ (called the "accurate" one). Since

$$355/113 = 3.1415929 \cdots,$$

this value must have been found before Tsu or his son continued the approximation. The value $\pi = 355/113$ is the famous one that appears as a partial fraction when π, written in its decimal form, is developed in a continued fraction; it does not appear in Western mathematics until 1584 [16]). The more precise value of the Tsus was not surpassed (so far as we know) until a thousand years later, about 1420, by Jamshid Al-Kashi, an astronomer of Samarkand, who found π to sixteen decimal places, as well as the corresponding expression in sexagesimal fractions — the decimals representing the Chinese tradition, and the sexagesimals the Babylonian-Greek tradition. Western mathematicians did not surpass the Tsus more precise value until around 1600.

III

During the Thang dynasty a corpus of the most important mathematical books was assembled for official use in the imperial examinations. It was in this period that printing began (eighth century), but the first printed mathematical books of which we have knowledge date from 1084 and later. In 1115 there was an important printed edition of the *Nine Chapters*.

In a book written by Wang Hsiao Thung around 625 we find for the first time a cubic equation more complicated than the $x^3 = a$ of the *Nine Chapters*. It appears in a problem dealing with a right triangle with one side x and hypotenuse y, of which we know that $y - x = S = 30\frac{9}{10}$ and that the product of the two sides $x\sqrt{(y^2 - x^2)} = P = 706\frac{1}{50}$. This leads to the cubic equation

$$x^3 + (S/2)x^2 - P^2/2S = 0,$$

which is solved by numerical methods reminiscent of the extraction of a cube root in the *Nine Chapters*, and which we still have to discuss.

With the later period of the Sung dynasty, and the early part of the Yuan, we arrive at the greatest period in ancient Chinese mathematics. A wealth of books appeared in this period, and a number of important names stand out. The leading figures are Chhin Chiu-Shao (whose book is of 1247), Li Yeh (whose books are dated from 1248 and 1259), Yang Hui (whose books are from 1261 and 1275), and finally the man who is held to be the most important of all, Chu Shih-Chieh (whose books are dated from 1299 and 1303) [17]).

The most interesting part of Chhin's work is where he takes up the indeterminate equations where Sun Tzu left them. In Chhin's case, the numbers $m_1, m_2, \cdots$ are no longer relatively prime in pairs, as can be seen from two of his problems:

$$N \equiv 1 (\text{mod } 2) \equiv 3 (\text{mod } 3) \equiv 1 (\text{mod } 4), \qquad (1)$$

$$N \equiv 32 (\text{mod } 83) \equiv 70 (\text{mod } 110) \equiv 30 (\text{mod } 135). \qquad (2)$$

If we now select μ_1, μ_2, μ_3 as factors, relatively prime in pairs, of m_1, m_2, m_3 respectively, keeping the least common multiple of μ_1, μ_2, μ_3 equal to that of m_1, m_2, m_3, then we can state [18]) that any solution of

$$N \equiv a_1 (\text{mod } \mu_1) \equiv a_2 (\text{mod } \mu_2) \equiv a_3 (\text{mod } \mu_3)$$

also satisfies

$$N \equiv a_1 (\text{mod } m_1) \equiv a_2 (\text{mod } m_2) \equiv a_3 (\text{mod } m_3),$$

and the problem is now reduced to the previous one. Chhin's solution of problem (1) is $N = (1)(1)(12) + (3)(1)(4) + (1)(3)(3) - (2)(12) = 9$.

Chhin was also one of the first to write a separate symbol, a circle, for zero. He also belongs to those mathematicians who

generalized the method for extracting a square and a cube root (as we find it in the *Nine Chapters*) to general equations of higher degree, so that we now find a general method for approximating the (real) numerical value of a root of an equation of arbitrary degree. One of the equations Chhin uses to illustrate his method is, in our notation,

$$-x^4 + 763200x^2 - 40642560000 = 0$$

(he always writes the constant term as a negative number). The equation is essentially quadratic, but Chhin treats it as a fourth degree equation, and it is solved by successive approximations.

Now, when we try to understand how Chhin does his approximation, we see that it is a direct generalization of the method by which the equations $x^2 = a$ and $x^3 = b$ in the *Nine Chapters* are solved. Let us take, as an example, the equation $x^2 - 71824 = 0$ of Problem 14, Chapter IV. A first approximation (obtained by easy trial and error) is $x = 200$. Then diminish the root by 200. The new equation, for $y = x - 200$, is obtained by the scheme:

1	0	−71824	
	200	40000	(+)
	200	−31824	
	200		(+)
	400		

whence $y^2 + 400y - 31824 = 0$, of which $y = 60$ is an estimate of the root. Proceeding in the same way we obtain, for $z = y - 60$, the equation $z^2 + 520z - 4224 = 0$, of which the root is 8. Hence

$$x = \sqrt{71824} = 200 + 60 + 8 = 268.$$

The *Nine Chapters* indicates only the method, but not the numerical scheme. The method, however, can be generalized to $x^3 = b$ and to general equations of higher order, as those of Chhin. And Chhin actually gives the numerical scheme, which follows the pattern we indicated for the equation $x^2 - 71824 = 0$. But this method is known in our algebra books as *Horner's method*, after the Englishman W. G. Horner, who first published it in 1819, probably blissfully unaware that he had rediscovered an ancient Chinese computation scheme [19]. In the case of his biquadratic equation, Chhin stopped at three decimals, finding 840 as his root. He also used his "Horner's method" for the solution of the quadratic equation

$$x^2 + [(a/2)^2 - (b/2)^2]x - 10(a + b)^3 = 0,$$

with $a = 576$ and $b = 34$; his answer was 21742 and a fraction. Although, as we have seen, negative numbers were familiar to the Chinese authors for many centuries, they confined themselves to positive roots of an equation, perhaps because the equation always expressed something concrete, such as a measure of land.

Li Yeh's books on algebra are interesting because we here find negative numbers indicated by a diagonal stroke through the right-hand digit, so that

stands for -10724.

Yang Hui, whose books are also some kind of continuation of the *Nine Chapters*, worked easily with decimal fractions, and he wrote them in a way which reminds us of our present methods. We have seen that decimal fractions occurred already at an early age, but in a rather complicated way, so that in a book of the seventh century a decimal 3.1415927 is written as 3 chang, 1 chhih, 4 tshun, 1 fen, 5 li, 9 hao, 2 miao, 7 hu [20]). Later some of these names are dropped, and in Yang Hui we find a unified system and terminology. In a computation of the area of a rectangle with given sides, he expresses both sides in pu so that the lengths become 24.68 and 36.56, and he finds the area $(24.68)(36.56) = 902.3008$, multiplied in the same way as integers [21]). Chhin Chiu-Shao also used decimal fractions in a similar way, and so did Chu Shih-Chieh.

Yang Hui presents us with the earliest extant Chinese representation of the Pascal triangle, which we find again in the book of 1303 written by Chu Shih-Chieh [22]). Chu speaks of the triangle as something already ancient, which suggests that the binomial theorem was known in China for a long time. Realizing that the case $(a + b)^3$ was used in the *Nine Chapters*, and taking into account the gradual development of Chinese mathematics along traditional lines, we may well associate the discovery of the general binomial theorem with the method of root extraction [23]).

Chu has been called the greatest of this group of Sung-Yuan mathematicians. His books seem to give the most accomplished presentation of the Chinese arithmetical-algebraic methods. For the handling of numerical equations, he introduced a general system of notation based on the familiar matrix methods. Starting from the center of a lattice, reserved for the constant term, the

coefficients of an algebraic equation with several unknowns were distributed in a way represented by the scheme (we take four unknowns):

$$\begin{array}{ccccccc} & & u^2y & u^2 & u^2z & & \\ & & uy & u & uz & & \\ \cdots y^3 & y^2 & y & \cdot & z & z^2 & z^3 \cdots \\ & & xy & x & xz & & \\ & & x^2y & x^2 & x^2z & & \end{array}$$

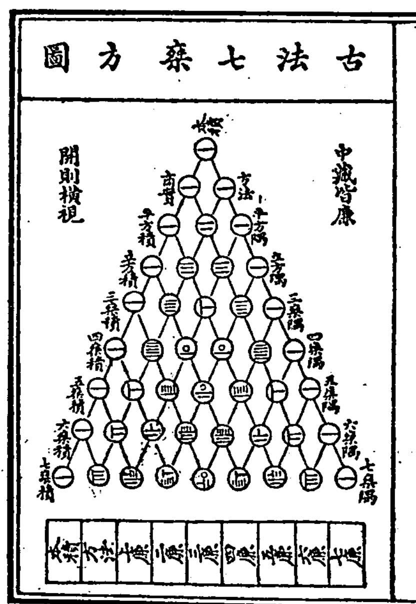
The · is also represented by a Chinese symbol. Where we have written u, u^2z, etc., the numerical coefficients of these terms were inserted, so that

$$x + y + z + u$$

would appear as

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ 1 & \cdot & 1 \\ & 1 & \end{array}$$

Chu's method of elimination and substitution ("Thien Yuan" system) has been compared to that of Sylvester, and several



The 'Pascal' Triangle as depicted in 1303 A.D. at the front of Chu Shih-Chieh's *Ssu Yuan Yü Chien*. It is entitled 'The Old Method Chart of the Seven Multiplying Squares' and tabulates the binomial coefficients up to the eighth power. From *Science and Civilization in China*, by J. Needham, vol. III, courtesy of Cambridge University Press.

Chinese mathematicians have devoted their attention to it [24]. In Chu's day the actual computational work might well have been performed on several counting boards used simultaneously, since several equations could be involved [25].

There is not much to say about the post-Sung period except that it continued to produce mathematicians, often functioning as astronomers, but that it failed to achieve fundamentally new results. Productive activity had reached its zenith. Where in the Thang period we can detect Indian influence, so do we find Arabic influence in the time of the Yuan. There is remarkably little directly traceable Western (Greek or Latin) influence in ancient Chinese mathematics — that is, in the mathematics of the China before the coming of the Jesuits, toward the end of the sixteenth century under the Ming dynasty. But we do not here deal with the mathematics of the later Ming period, except to mention that in a book by Chheng Ta-Wei of 1593 [26] we find the first description of the Chinese abacus, with instructions for its use [27].

NOTES

1) Y. Mikami, *The Development of Mathematics in China and Japan* (Leipzig: Teubner, 1913) viii + 347 pp. Reprinted by Chelsea Publishing Company, 1961. Mikami died in 1950. Referred to as *M.*

2) Smith's book is now available in a Dover reprint of 1958. Smith also wrote some special papers on Chinese mathematics; see *Popular Science Monthly*, 80 (1912), 597–601; *Scientific Monthly* 33 (1931), 244–250.

3) K. L. Biernatzki, "Die Arithmetik der Chinesen," *Crelle's Journal*, 52 (1856), 59–94. Biernatzki's paper was based on papers by A. Wylie (*North China Herald*, 1852), reproduced in the *Shanghai Almanac for* 1853 and in Wylie's *Chinese Researches*, Shanghai, 1897 (reproduced, Peiping, 1936).

4) The many papers of L. van Hée appeared between 1911 and 1930, many in *T'oung Pao* (Leiden). See also *Isis*, 27 (1937), 321, and 30 (1939), 84–8, and "Quellen und Studien zur Gesch. d. Mathem," B 2 (1932), 255–80. Other and more recent articles are: Li Nien, *Proc. 8th Intern. Congress Hist. Sc.* (Florence, 1956) 70–2, Wang Ling, *ibid*,. pp. 13–7; J. Needham, *Science and Society*, 20 (1956), 320–43; Wang Ling and J. Needham, *T'oung Pao*, 54 (1955), 345–99; A. P. Juškevič, *Istor.-Matem. Issled*, 8 (1955), 539–72, also *Uspekhi Mat.*, 2 (1956), 256–78 (in Russian). See also R. H. van Gulik, *De mathematische conceptie bij de oude Chinezen*, Euclides 5 (1927/28), 104–109.

5) J. Needham (with the collaboration of Wang Ling), *Science and Civilization in China*, volume 3 (Cambridge: University Press, 1959), xlvii + 877 pp. (Volume 1 appeared in 1954, volume 4a [Physics] in 1962). We adopt in our paper the consistent transliteration of Chinese ideographs found in the book by Needham. This book is referred to as *N*. We also have now an exposition of Chinese mathematics in Russian as Chapter I of A. P. Juškevič, *History of Mathematics in the Middle Ages* (Moscow, 1961). See also A. P. Juschkewitch and B. A. Rosenfeld, "Die Mathematik der Länder des Ostens im Mittelalter," *Sovjetische Beiträge zur Ge-*

schichte der Naturwissenschaften (Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1960) 62–160.

[6]) E. I. Berezkina, "The ancient Chinese tract 'Mathematics in Nine Books'," *Istor.-Matem. Issled,* 10 (1957), 425–584 (in Russian). In *N.* p. 24, we are informed that Wang Ling is engaged upon an English translation.

[7]) On the decimal system in China see also The Tjoe Tie, De oorsprong van het tientallig stelsel, *Scientiarum Historia,* 4 (1962), 24–34.

[8]) *N.*, p. 75. See also S. T. Li, "Origin and development of the Chinese abacus," *Journ. Assoc. of Computing Machinery,* 6 (1959), 102–10.

[9]) *Nine Chapters on the Mathematical Art.*

[10]) The full name, "Chou Pei Suan Ching," is translated by *N.* as "The Arithmetical Classic of the Gnomen and the Circular Paths of Heaven."

[11]) For $n = 10$ there was the rule $\sqrt[n]{a} = (1/10^k)\sqrt[n]{(a\ 10^{kn})}$, which appears later in India and then still later in European medieval sources; see *N.*, p. 89.

[12]) The word we transcribe from the Russian by "dou" means "grain" or "seed."

[13]) Our x is expressed by four ideographs, "shang ho ping su," and similarly y and z; see *N.*, p. 115.

[14]) The relation of this and of later Chinese remainder problems, and those solved by Indian mathematicians from Aryabatha (*b.* 476) on, is still obscure. There is also a close connection between these purely mathematical questions and calendrical science. This again is only one aspect of the many relationships existing between Chinese mathematics and astronomy, but which we cannot here discuss.

[15]) The Russians have named a formation on "the other side of the moon" after Tsu Chhung-Chih.

[16]) The so-called "value of Metius," $\pi = 355/113$, after the Alkmaar burgomaster Adriaen Anthonisz, whose sons called themselves Metius. The German Valentin Otto may have found this value of π already in 1573.

[17]) Another leading figure is Shen Kua (whose book, one of the first to describe the magnetic compass, is of 1086). To him (Mikami writes his name Ch'en Huo) and to the other four mathematicians, Mikami devotes a chapter each. *N.* quotes Sarton as saying that it is somewhat strange that the relations between Chhin, Li, Yang, and Chu, following one another, as they did, in half a century, were so remote. They never seem to refer to each other. They were — contrary to Wang Hsiao-Thung under the Thang, who was a high official (as was Shen Kua) — mostly poor wandering scholars or minor officials. See *N.*, pp. 41–2.

[18]) *N.*, p. 121, where the restriction is made that $a_i - a_j$ must be divisible by the greatest common divisor of m_i and m_j. This happens in Chhin's cases. On the Chinese remainder problem, see also K. Mahler, *Math. Nachrichten,* 18 (Berlin, 1958), 120–22.

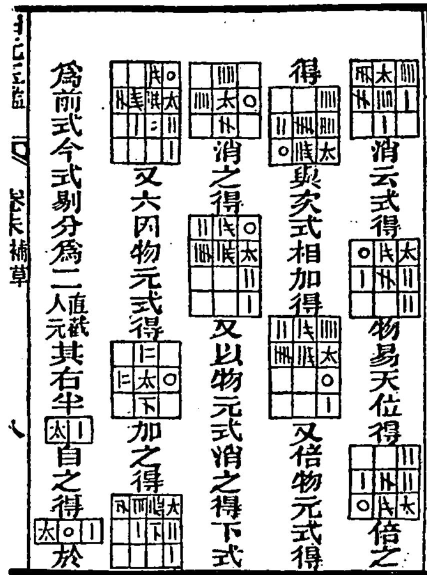
[19]) W. G. Horner, *Philos. Transactions,* 1 (1819), 308–35. See e.g., E. A. Cameron and E. T. Browne, *College Algebra* (New York: 1949), pp. 245–48. Also see J. L. Coolidge, *The Mathematics of Great Amateurs* (Oxford: Clarendon Press, 1949), Chap. XV. It is ironic that the essay was published "to secure beyond the hazard of controversy an Englishman's property in a useful discovery."

[20]) *M.*, p. 78; also see *N.*, p. 86.

[21]) *M.*, p. 86.

[22]) *N.*, pp. 134–35, where there is a reproduction of the figure as we find it in the book of 1303.

[23]) The oldest extant appearance of the binomial theorem outside of China is in the *Key to Arithmetic* of Al-Kashi (early fifteenth century). But Omar Khayyam



消云式得物易天位得倍之

得與云式相加得又倍物元式得

消之得又以物元式消之得下式

又六因物元式得加之得

爲前式今式剔分爲二人元直積其右半自之得於

A page from a 19th century edition of the *Ssu Yuan Yü Chien* of Chu Shih-Chieh (1303 A.D.) showing the 'matrices' of the *Thien Yuan* algebraic notation. The middle frame in the first column on the right shows $xy^2 - 120y - 2xy + 2x^2 + 2x$ in the form

0	-120	
1	-2	2
		2

From *Science and Civilization in China*, by J. Needham, vol. III, courtesy of Cambridge University Press.

hints, in his *Algebra* (*c.* 1100), that he has this theorem. The text in which Omar explains this result has not (yet?) been found. *N.*, p. 137, suggests that Omar's work was derived from Indian sources, which themselves may have been influenced by Chinese methods of root extraction.

[24]) *N.*, pp. 47–8, 129.

[25]) On Chu's book of 1303, which was called *The Precious Mirror of the Four Elements*, and in which these complicated solutions are discussed, see also L. van Hée, "Le précieux miroir des quatre éléments," *Asia Major*, 7 (1932), 242–270.

[26]) *N.*, p. 51.

[27]) No account of ancient Chinese mathematics should be without a word concerning the famous magic square Lo Shu (Lo River Document):

4	9	2
3	5	7
8	1	6

which was supposedly brought to man by a turtle from the River Lo in the days of the legendary emperor Yü, the great hydraulic engineer. Whatever the date of its origin may be, it is the oldest magnic square on record. It first appears in texts dating from the Han period and was considered important in divination. We often see it accompanied by the diagram Ho Thu (River Diagram), which has the same numbers in the form of a cross. Generalization to more complicated magic squares begins with Yang Hui in his book of 1275. See S. Cauman, "The Evolution of Magic Squares in China," *Journ. Amer. Oriental Soc.*, 80 (1960), 116–24. The same author's paper in *History of Religions*, 1 (1961), 37–80, is largely non-mathematical.

[28]) A French translation with introduction by L. van Hée, *Quellen und Studien zur Gesch. d. Mathem.* B2 (1932) 255–280.

DIDACTISCHE LITERATUUR UIT BUITENLANDSE TIJDSCHRIFTEN

1. *Mathematisch-Physikalische Semesterberichte zur Pflege des Zusammenhangs von Schule und Universität* (X, 2, 1963).

A. Walther, Elektronisches Rechnen und Schulmathematik;
H. Freudenthal, Die Orientierung des Raumes;
H. G. Steiner, Frage und die Grundlagen der Geometrie;
K. P. Grothemeyer, Einige Probleme und Methoden der Flächentheorie im Groszen;
G. Pickert, Deduktive Geometrie im Gymnasialunterricht;
K. Fladt, Vektorielle Behandlung der ebenen affinen Abbildungen;
A. Bauer, Rationale Punkte auf Kurven dritter Ordnung vom Geschlechte Eins;
H. Gericke, Archimedes' Abhandlung „Über Spiralen";
W. Franz, Relativitätstheorie und Weltraumfahrt;
K. Kopfermann, Lösung eines Problems über Peano-Abbildungen.

2. *Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public* (XLIII, 233; décembre 1963).

J. Itard, Jacques Hadamard (1865—1963);
L. Schwartz, La rôle des mathématiques en physique vu sous l'angle de l'éducation scientifique;
G. Delpla, Les angles et la géométrie analytique du plan;
C. Girault, Dessin graphique et mathématique;
J. Vautard, La propédeutique et le recrutement des maîtres;
J. Martine, Sur les quantificateurs;
E. Duponsky, Opérations dans un simplexe;
Documents officiels, Concours de recrutement 1963; Rapports sur le Concours Général 1963.

Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (XLIII, 238, février 1964).

J. Chastenet de Géry, Introduction à la géométrie pseudo-euclidienne de la relativité restreinte;
A. Donedu, Mesure des grandeurs archimédiennes;

J. Boudot, L'enseignement du calcul numérique dans les classes préparatoires;
R. Esteve, Le produit scalaire et une trigonométrie simple à partir de la Troisième;
J. M. Nachtergaele, XVII[e] rencontre internationale de professeurs de mathématiques (Digne, août 1963);
G. Lopata, Sur l'alternative et la simultanéité;
F. Brachet, Cylindre, berlingot, tétraèdre;
M. Bouteiller, Projecteurs en géométrie affine;
J. Vautard, Une application du calcul matriciel à la cryptographie.

Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (XLIII, 239, avril—mai 1964).

G. Glaeser, L'évolution récente de la pédagogie mathématique;
S. Straszewicz, Le dessin des configurations spatiales et l'enseignement élémentaire de la géométrie;
D. Lacombe, Sur les mots et les symboles;
G. Th. Guilbaud, Sur une question de combinatoire;
M. Sagot, Problème de dénombrement;
E. Duponsky, Sur une distance non-euclidienne;
Documents officiels, Epreuves théoriques du C.A.P.E.T. 1963.

3. *Mathematica et Paedagogia* (IX, 25; 1964).

R. Faure, Rapports réciproques entre calculateurs numériques automatiques et mathématiques;
C. C. Grosjean, Beschrijving van een eenvoudige electronische rekenmachine: de IBM 610;
E. Etienne, A bâtons rompus, dans le jardin des relations;
F. Hotyat, Quelques considérations sur les résultats en mathématiques dans le cadre d'une recherche internationale sur les acquisations scolaires d'élèves de 13—14 ans;
Verslag van een studieweek te Amsterdam.

4. *Praxis der Mathematik* (VI, 1, Januar 1964).

B. Riethmüller, Analytische Abbildungsgeometrie mit Matrizen;
H. Uchtmann, Der Kreis in der Mittelstufe;
H. Dücker, Zum Kleinschen Modell im Unterricht;
Kl. Kursawe, Ist die Darstellung von π Stabil?
I. Paasche, Drei Sorten ebener Dreieckshöhen;
W. Böhme, Kugelspiegelsätze und Scheitelkrümmungskreis der Kegelschnitte;
U. Klemm, Mathematisch-biologische Probleme.

Praxis der Mathematik (VI, 2, Februar 1964).

H. Günther Bigalke, Der Mengenbegriff in Klasse 5 (Sexta);
H. Kniess, Verkürztes Quadratwurzelziehen;
F. Ostermann und J. Schmidt, Einführung in die Vektorrechnung;
K. H. Hürten, Das Verschiebe-Spiel;
Nürtinger Symposium über Lehrmaschinen;
Aufgaben der 3. Internationale Mathem. Olympiade.

Praxis der Mathematik (VI, 3, März 1964).

A. Engel, Das Kontinuumproblem ist gelöst;
K. H. Hürten, Abbildungsgeometrie oder Bewegungsgeometrie;

W. Rohde, Vektoren in Tertia;
E. Geyer, Zum Entwicklungssatz für Vektoren;
K. D. Schmidt, Zur vollständigen Induktion.

Praxis der Mathematik (VI, 4, April 1964).

A. Fried, Eine Wahrscheinlichkeitsbetrachtung mit überraschendem Ergebnis;
F. Barth, Einführung der Quadratwurzel;
H. Schäfer, Astronomie im Unterricht;
Aufgaben der vierten internationalen Mathem. Olympiade;
Seminar für Didaktik der Mathematik in Gieszen, 1964.

Praxis der Mathematik (VI, 5, Mai 1964).

K. H. Hürten, Modern oder traditionell;
G. Harbeck, Eine Einführung der Hyperbelfunktionen;
R. Stettler, Logische Auflösung von Ungleichungen;
K. Wuchterl, Die Satzumkehrung mengentheoretisch.

Praxis der Mathematik (VI, 6, Juni 1964).

W. Hartkopf, Zur Heuristik der Gleichungsauflösung;
P. Ehringhaus, Alle neun! Vierecke;
Ch. Meckert, Die Münze im Teich;
Kl. Kursawe, Überall unstetige Funktionen;
Kl. Wigand, Programmiertes Unterrichten.

5. *Elemente der Mathematik* (XIX, 1, Januar 1964).

M. Jeger, Über die gruppen-algebraische Struktur der Elementargeometrie;
L. Bernstein und J. Steinig, Wissenswertes um das Dreieck;
Bericht über das internationale mathematisch-geschichtliche Kolloquium im mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach.

Elemente der Mathematik (XIX, 2, März 1964).

H. Groemer, Über Würfel- und Raumzerlegungen;
W. Sierpinski, Sur une propriété des nombres naturels;
M. Jeger, Über die gruppen-algebraische Struktur der Elementargeometrie (Fortsetzung);
W. Böhm, Verallgemeinerung des Satzes von Dandelin.

Elemente der Mathematik (XIX, 3, Mai 1964).

G. Fejes-Toth, Über die Blockierungszahl einer Kreispackung;
H. Schaal, Euklidische und pseudo-euklidische Sätze über Kreis und gleichseitige Hyperbel;
S. Tauber, On N-numbers.

6. *Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht* (XVI, 9; Februar 1964).

L. Kienle, Zum Groszenkalkül;
E. Schneider, Spiegelungsgeometrie auf der Oberstufe;
H. Lindner, Unterrichtsversuche zur Mengenalgebra und Aussagenlogik;
R. Inneichen, Elementare Beispiele zur linearen Programmierung und zur Spieltheorie;

A. Kester, Zur Anwendung der Vektorrechnung auf die Transformationen der Kegelschnittgleichung.

Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht (XVI, 10; März 1964).

G. Moll, Affine analytische Geometrie der Kegelschnitte;
E. Schneider, Spiegelungsgeometrie auf der Oberstufe (Fortsetzung);
M. Czerny, Zur Didaktik des Begriffes „Arbeit".

Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht (XVII, 1, Mai 1964).

R. Gunzenhäuser, Programmierter Unterricht und Lehrmaschine;
H. Athen, Vektorielle Abbildungsgeometrie;
H. Zetler, Die Dreiecksfläche in der sphärischen und hyperbolischen Geometrie;
J. Bruhn, Programmierter Unterricht und Lehrmaschine.

Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht (XVII, 2, Juni 1964).

E. Boerma, Galileis „Discorsi";
H. Besuden, Eigenschaften perfekter Zahlen;
H. Schubart, Der Zinsfusz bei Ratenkäufen;
H. Athen, Internationale Arbeitstagung der O.E.C.D. über neue Methoden im Mathematikunterricht der höheren Schulen.

Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht (XVII, 3, Juli 1964).

C. Müller, Naturwissenschaft—Kunst oder Macht?
W. Weber, Lösbarkeit von Konstruktionsaufgaben in dreifacher Sicht;
G. Helma, Über Streichholzspiele im Unterricht.

7. *School Science and Mathematics* (LXIV, 1; 561; January 1964).

P. B. Field, A description of a mathematical field day;
L. B. Fisher, How curriculum builders view "New Math" ideas;

School Science and Mathematics (LXIV, 2; 562; February 1964).

A. P. Riess, A new approach to the teaching of fractions in the intermediate grades;
M. Schoe Banks, Flannel board geometry;
W. R. Talbot, Schematics for products of polynomials.

School Science and Mathematics (LXIV, 3; 563; March 1964).

J. T. Rettaliata, Mathematics and Science: partners in progress;
D. Paige, General mathematics;
L. M. Laper, It's time to review calculus;
J. Mayer, Metric system developments;
A. B. Carr, Dürer's pentagon.

School Science and Mathematics (LXIV, 4; 564; April 1964).

I. Lynch, Forces that have influenced the school mathematics program;
P. M. Green and L. A. Ostlund, Effective projects in mathematics and science teaching;
P. C. Burns and J. L. Yonally, Does the order of presentation of numerical data in multi-steps arithmetic problems affect their difficulty?
D. J. Dessart, Some thoughts on programmed instruction in mathematics.

School Science and Mathematics (LXIV, 5; 565; May 1964).

G. W. Brown, Improving instruction problem solving in ninth grade general mathematics;
G. G. Mallinson, Will books become obsolete?;
E. Streng, Meaningful metrics;
J. D. Wiseman, Scrambled theorems.

School Science and Mathematics (LXIV, 6; 566; June 1964).

D. Mol, What is science?
H. Clark Overley, The internal bisector problem;
G. J. Pawlikowski, Projectile motion in a resisting medium;
R. L. Morton, Reciprocal expressions in different numeral systems;
R. F. Graesser, Note on the fundamental theorem of integral calculus.

8. *The Mathematics Teacher* (LVI, 8; December 1963).

Reviews of films; A report of some reviewing committees;
C. C. Thorsen, Structure diagrams for geometry proofs;
W. G. Mehl, Fractions and line segments;
R. M. Gagné, Learning and proficiency in mathematics;
F. D. Alexander, Teaching fundamental concepts of mathematics at the college level by closed-circuit television;
J. B. Easton, Kinematical constructions of the conics.

The Mathematics Teacher (LVII, 1; January 1964).

A. Forsythe, Mathematics and computing in high school a betrothal;
P. H. Nygaard, Iteration solution methods;
Lowell Leake, An iterative application for elementary algebra;
A. R. Hesse, Iterative methods in high school algebra;
G. H. Miller, The evolution of group theory;
B. Litvak, History of group theory leading to development of infinite abelian groups;
D. Granito, What to do with a mathematical club?

The Mathematics Teacher (LVII, 3, March 1964).

H. Levy, The role of geometry in the eleventh and twelfth grades;
P. W. Avers, A unit in high school geometry without textbook;
W. E. Ferguson, Current reforms in the mathematics curricula-a passing phase or progress?
J. J. Comfort, Permutations from a different point of view;
C. V. MacCamman, A bibliography on the changing curricula in secondary school mathematics;
P. H. Randolph, An experiment in programmed instruction in junior high school;
D. J. Struik, The Kensington stone mystery.

The Mathematical Teacher (LVII, 5; May 1964).

R. H. Wilson, The importance of mathematics in the space age;
J. D. Kapla, An example of student-generated sequences in mathematical instruction;
R. V. Spencer, Discovery of basic inversion theory by construction;
D. W. Stover, Projectiles.

The Mathematics teacher (LVII, 4; April 1964).

D. W. Hight, The limit concept in the SMSG revised sample textbooks;
D. L. Klingler, Structuring a proof;
D. E. Myers, Irrational, area and possibility;
C. E. Falbo, Some axioms for teaching real exponents;
H. J. Shurlow, The greatest integer fraction;
A. P. Schulte, Pythagorean mathematics in the modern classroom.

9. *The Mathematical Gazette* (XLVII, 362; december 1963).

F. Smithies, What is modern mathematics?;
A. P. Rollett, A history of the teaching of modern mathematics in England;
W. H. Cockcroft, The principles of teaching modern mathematics;
T. A. Jones, H. W. Cundy and Mrs E. M. Williams, What can be taught in the sixth form, in the main school and in the primary schools;
E. Kerr, Mathematics in colleges of technology;
A. W. Bell and W. O. Storer, Modern mathematics in training colleges and university departments of education.

Dit nummer is geheel gewijd aan de plaats die moderne wiskunde op de scholen inneemt of behoort in te nemen.

The Mathematical Gazette (XLVII, 363, February 1964).

A. L. Leigh Silver, Some musico-mathematical curiosities;
B. R. Jones, Genaille's rods, an ingenious improvement on Napier's;
H. W. Lowry, Units and symbols in mechanics;
A. Oppenheim and R. O. Davies, Inequalities of Schur's type;
H. Thurston, A paradox;
J. Cable, What is a vector?;
G. Giles, Vector geometry in school;
Miss J. Holland, Illustrations of simple group theory.

BOEKBESPREKING

Dr. P. G. J. Vredenduin, *Vijfentachtig wiskundige puzzels*; P. Noordhoff n.v., Groningen, 1964; 86 bladz., 37 figuren; *f* 3,90.

Voor de lezers van Euclides zijn deze puzzles niet onbekend; men vindt ze in de jaargangen 34—38 onder de rubriek recreatie opgenomen. Wie lust heeft om zich in zijn vrije tijd met aardige problemen of probleempjes bezig te houden, vindt hier een geschikte collectie. De oplossingen, door dr. Vredenduin gegeven, bieden in sommige gevallen nadere stof tot bespiegelingen. Niet altijd zal men dezelfde oplossing geven; soms komt men tot de ontdekking dat in de gegeven oplossing een niet vermeld vooropgesteld standpunt is verdisconteerd (bijv. bij de oplossing van opgave 55). Dit maakt het spel slechts interessanter.

In het woord vooraf valt de zin op: Soms heeft men (voor de oplossing der opgaven) alleen gezond verstand nodig, soms enige wiskundekennis. Deze uitspraak kan reeds aanleiding tot verder nadenken zijn. Is het een Vredenduin-grapje, of steekt er meer achter?

Hartelijk aanbevolen!

W. J. Claas

55e M.N.U.-TAGUNG TE AKEN

Enkele indrukken

door

G. KROOSHOF

I. In de ontzagwekkend grote en moderne collegezalen van de 'Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule' te Aken werd op 31 maart en 1, 2 en 3 april van dit jaar het 55e congres gehouden van de 'Deutscher Verein zur Förderung des Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Unterrichts', in de wandeling MNU geheten.

Rondom de collegezalen waren in de ruime hallen op alle verdiepingen boeken en leermiddelen uitgestald door uitgevers en fabrikanten. Men kon dus op zijn gemak kennis nemen van de in Duitsland toegelaten wiskunde-methoden. Duidelijk werd, dat er voorzichtig getracht werd tot modernisering van de leerboeken over te gaan, maar dat men daarmee nog niet ver gevorderd was.

Enerzijds willen de uitgevers de grote mannen onder hun auteurs, die langzamerhand aan hun pensioen toe zijn, niet voor het hoofd stoten; anderzijds geeft het Duitse systeem, waarbij slechts een beperkt aantal methoden op de boekenlijsten wordt toegelaten, aanleiding tot een zekere verstarring. 'Voor ons', zei een der uitgevers tegen me, 'is deze maatregel wel voordelig. Je hebt een beperkter aantal uitgaven en grotere oplagen. Maar voor de pedagogische-didactische ontwikkeling vinden we dit systeem een grote rem.'

Enkele uitgevers komen binnenkort op de markt met schoolboeken, waarvoor ze dadelijk nog geen toestemming voor de boekenlijsten vragen, maar die eerst in zg. Arbeitsgemeinschaften geprobeerd kunnen worden.

De aandacht voor wat er in het buitenland gebeurt, is groeiende. Van verschillende boeken voor docenten komen Duitse vertalingen. Zo zijn er bijv. al van enkele boekjes van de bekende Belgische professor Papy vertalingen verschenen. Ook worden de uitgaven van de O.E.E.C. 'Synopsis for modern school mathematics' en 'New thinking in school mathematics' vertaald.

De 800 deelnemers van het congres konden gedurende de vier dagen voordrachten beluisteren over wiskundige, natuurkundige,

scheikundige en biologische onderwerpen. Enkele daarvan werden gehouden door hoogleraren, de meeste echter door leraren. Ik kreeg de indruk, dat men de lezingen van de collega's hoger waardeerde, dan de dikwijls nogal moeilijke en compact samengestelde vakvoordrachten door professoren. Elke voordracht duurde drie kwartier en het is al heel moeilijk om een onderwerp in deze korte tijd in te leiden en uit te werken zo, dat er een begrijpelijk afgerond geheel ontstaat. Na afloop van elke voordracht was er gelegenheid om in een bij de collegezaal gelegen kleiner zaaltje met de spreker te discussiëren. Het gehele programma was echter wel wat overladen, zodat verschillende deelnemers zich beperkten tot een keuze uit het gebodene. Naast de officiële voordrachten, meestal daaraan voorafgaande, bijvoorbeeld al om 8 uur des morgens, waren er demonstraties en lezingen namens enkele leermiddelenfabrikanten. Zo was er een zeer interessante demonstratie van materiaal, waarmee de magnetische eigenschappen van metalen gedemonstreerd konden worden.

Van enkele voordrachten heb ik notities gemaakt, hoewel dat wel moeilijk was door het hoge tempo, dat de meeste sprekers namen, om in de hun toegestane drie kwartier klaar te komen. Aan de hand van die notities wil ik nog enkele punten naar voren halen.

II. Voor de firma Lindauer te München sprak Dr. J. Krettner over *'Die arithmetische Reihe als Vorbereitung des bestimmten Integrals'*.

Hij begon met te bewijzen, dat men voor de som der eerste n termen van de rekenkundige rij van de eerste orde:

$$a_1, a_1 + a_0, a_1 + 2a_0, a_1 + 3a_0, \ldots$$

kan schrijven:

$$s_n = \binom{n}{1} a_1 + \binom{n}{2} a_0.$$

Dit bewijs werd gegeven volgens het principe van de volledige inductie.

Op dergelijke wijze werd bewezen voor de som der eerste n termen van een rekenkundige rij van de k-e orde:

$$s_n = \binom{n}{1} a_k + \binom{n}{2} a_{k-1} + \binom{n}{3} a_{k-2} + \ldots + \binom{n}{k+1} a_0.$$

Met behulp van deze formules kan men gemakkelijk berekenen:

$$\sum_{k=1}^{n} k; \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2; \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 \qquad \text{enz.}$$

We kunnen deze resultaten dan gebruiken bijv. voor de berekening van de inhoud van een omwentelingsparaboloïde.

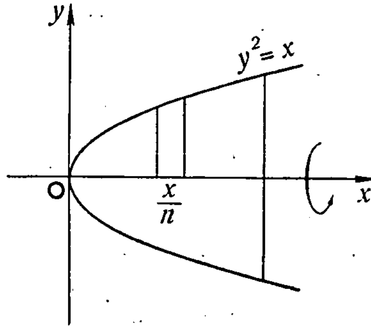


Fig. 1.

We berekenen bijvoorbeeld eerst:

$$V_n = [\pi y_1^2 + \pi y_2^2 + \ldots + \pi y_n^2] \cdot \frac{x}{n}$$

$$= \frac{\pi x}{n} [x_1 + x_2 + \ldots + x_n]$$

$$= \frac{\pi x}{n} \left[\frac{x}{n} + 2\frac{x}{n} + \ldots + n\frac{x}{n}\right]$$

$$= \frac{\pi x^2}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{\pi x^2}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

De gevraagde inhoud V is nu gelijk aan lim V_n voor n gaande naar oneindig.

Aan de hand van nog enkele van deze voorbeelden werd nu duidelijk gemaakt, dat op deze manier de rekenkundige rijen gebruikt kunnen worden als inleiding tot de berekening van bepaalde integralen. Bij de discussie bleek, dat de hoorders nog niet goed zagen hoe deze wijze van behandelen ingepast kon worden in het gewone programma. Wel was men het er over eens, dat men hier mooie voorbeelden had voor het gebruiken van de binomiaalcoëfficiënten en voor de toepassing van de volledige inductie.

III. Dr. M. Dönges (Düsseldorf) sprak over '*Die irrationalen Zahlen in der Mittelstufe*'.

De spreker wilde duidelijk maken, dat de irrationale getallen meestal ingevoerd worden op een onbevredigende manier. De bewijzen, die voor de rekenregels worden gegeven in lessen en leerboeken, zijn dikwijls schijnbewijzen.

Wie bijvoorbeeld in de klas bewijst, dat $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$ door beide leden te kwadrateren, vraagt zichzelf en de klas daarbij in het algemeen niet af:

a. Wat *betekent* het produkt van deze twee irrationale getallen?
b. Gelden voor zo'n produkt wel de, bij het kwadrateren van het linkerlid gebruikte commutatieve en associatieve wetten?
c. Zijn $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ en $\sqrt{6}$ wel 'einwandfrei' gedefinieerd?

Spreker wilde de getallen $\sqrt{k}$ invoeren met behulp van de getallenlijn en meetkundige constructies. Enkele voorbeelden daarvan:

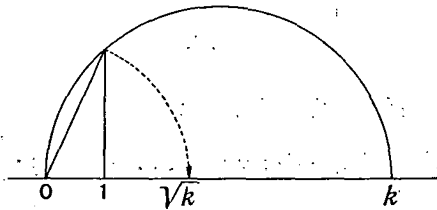


Fig. 2.

In fig. 2 is de constructie van het getal $\sqrt{k}$ gedemonstreerd. Men kan voor de zo geconstrueerde getallen gemakkelijk een optelling definiëren door achter elkaar afpassen.

De vermenigvuldiging wordt gedefinieerd door te postuleren, dat het produkt van elk tweetal reële getallen a en b gelijk moet zijn aan de oppervlakte van de rechthoek met deze getallen als lengten der zijden. In fig. 3 blijkt hoe deze rechthoek veranderd wordt in een nieuwe met zijden 1 en $a \cdot b$, zodat dus met deze constructie het getal $a \cdot b$ op de getallenlijn gevonden kan worden. Gemakkelijk kan worden aangetoond, dat deze vermenigvuldiging commutatief is. Werkt men inplaats van met rechthoeken met blokken, dan kan men bewijzen, dat $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.

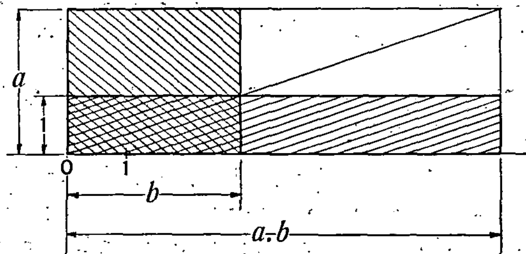


Fig. 3.

Daardoor krijgt ook de volgende berekening zin:

$(\sqrt{2} \cdot \sqrt{3})^2 = (\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}) = (\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3} \cdot \sqrt{3})$
$= 2 \cdot 3 = 6.$

Het spreekt vanzelf, dat ik het hier bij deze korte notities moet laten. Waarschijnlijk worden de voordrachten nog afgedrukt in het tijdschrift van de MNU.

IV. H. G. Steiner (Münster) sprak over: *Wie steht es mit der Modernisierung unseres Mathematikunterrichts?*

Deze voordracht vormde voor mij wel het hoogtepunt van het congres. Zij was bijzonder rijk aan vruchtbare gedachten. De zinsbouw was echter zo Duits-ingewikkeld en daarbij het tempo van uitspreken zo hoog, dat het maken van notities bijzonder moeilijk was. In het begin van 1965 zal bij de uitgeversmaatschappij Quelle und Meyer (Heidelberg) een boek verschijnen, waarin de voordracht opgenomen zal worden. De titel van het boek zal waarschijnlijk zijn: Aus der Praxis des modernen Mathematikunterrichts.

Uit mijn notities noem ik nog enkele punten:

In de traditionele aanpak is de schoolwiskunde de 'Systematik von Raum und Zahl'. Felix Klein heeft dat al doorbroken, maar we moeten verder gaan dan Klein. We moeten nu de schoolwiskunde gaan zien als de 'Theorie der Strukturen'.

Spreker was een voorstander van het door Martin Wagenschein gepropageerde 'exemplarische Lernen', waarbij niet een groot gebied wordt bestudeerd, maar een kleiner gebied wordt gebruikt om diep op een bepaald onderwerp in te gaan. Een der punten, waarop een moderne wiskundedidactiek zich moet richten, is dan ook 'das Exemplarische'.

Naast 'das Exemplarische' is voor de wiskundedidactiek een noodzakelijk studieobject 'das Elementare'. De vraag moet gesteld worden: Wat is eigenlijk elementaire wiskunde? Men zou geneigd zijn deze vraag te beantwoorden met: De wiskunde, die op de middelbare school onderwezen wordt. Maar het is zeer twijfelachtig of deze inderdaad elementair is.

Enkele kenmerken voor het elementaire waren volgens de spreker:

a. het moet een 'erschliessend Charakter' hebben (in dubbele zin),
b. het moet telkens opnieuw bepaald worden, men kan niet voor alle tijden vastleggen, wat de elementaire wiskunde is,
c. het algemene moet ontdekt worden aan het bijzondere (hier speelt dus ook 'das Exemplarische' een rol),
d. het moet 'pregnant einfach' zijn.

Over de modernisering van het wiskundeonderwijs zei spreker o.a.: Men moet niet doen, wat nu in verschillende leerboeken gebeurt, dat men hier en daar een nieuw, moderner hoofdstuk invoert. Dat is een kwasi-modernisering. Noodzakelijk is een totaal nieuw geheel, vanwaar uit men de onderdelen vernieuwt.

Het spijt me, dat ik het bij deze enkele aantekeningen moet laten. Mijns inziens moeten we met belangstelling het aangekondigde boek tegemoet zien.

V. Tenslotte wil ik nog vermelden de belangrijke voordracht van Prof. Dr. H. Behnke (Münster). Zijn onderwerp was de didactiek van de wiskunde op de universiteit. Ik moet volstaan met de samenvatting, die in het programma werd gegeven:

Mit der in der letzten Jahrzehnten so sehr schnell zunehmende Abstraktion und Axiomatisierung der mathematischen Forschung und des Unterrichtes an der Universität wird es immer schwieriger, den Akademischen Unterricht für die zukünftigen Lehramtskandidaten sinnvoll zu gestalten. Es gilt deshalb, sich im Interesse unserer akademischen Jugend zu besinnen und unter Ausnutzung von Vorschlägen von Klein, Toeplitz, Polya und Freudenthal wieder einen engeren Anschluss zwischen Schule und Universität zu gewinnen. Es gibt nur eine Mathematik.

UIT HET VERSLAG VAN DE COMMISSIE VOOR HET STAATSEXAMEN GYMNASIUM in 1963

WISKUNDE

Wat de A-kandidaten betreft deelt de subcommissie voor de wiskunde mede, dat het gemiddeld cijfer behaald voor het onderdeel VIa 5,1 (vorig jaar 5,0) en voor het onderdeel VIb 5,1 (v.j. 5,0) was.

Deze gemiddelden zijn sterk gedrukt door de zeer lage cijfers van verscheidene kandidaten, die blijk gaven dit onderdeel van het examen geheel of vrijwel geheel te hebben verwaarloosd. Zelfs moest één kandidaat uitsluitend op grond van het behaalde wiskundecijfer worden afgewezen. Herhaaldelijk deed zich het geval voor, dat het opleggen van verlengde examens onmogelijk werd vanwege het zeer lage cijfer, dat voor de wiskunde moest worden gegeven.

De voor het onderdeel VIa gedane keuze was: in 186 gevallen de in het K.B. van 1958, Stb. 431, voorgeschreven leerstof voor de algebra in de klassen I—IV van het gymnasium, met uitzondering van de logaritmen en de rijen; bij 60 kandidaten de logaritmen en de rijen; 5 maal de differentiaalrekening; 10 kandidaten kozen de geschiedenis van de wiskunde, terwijl slechts 2 maal de keuze op de statistiek is gevallen.

Voor het onderdeel VIb ging de voorkeur van 233 kandidaten naar de planimetrie en van 30 naar de stereometrie.

Verschillende examinandi bleken niet geheel op de hoogte te zijn van de betekenis van de door hen gedane keuze. Zo verkeerden sommigen in de mening dat, wanneer men voor het onderdeel VIa de geschiedenis van de wiskunde gekozen had, men was vrijgesteld van de verplichte stof, dus van de kennis van de kwadratische functies en de vierkantsvergelijkingen. Eén kandidaat leefde zelfs in de overtuiging dat voor VIa deze verplichte stof en dan voor VIb de geschiedenis gekozen kon worden.

De subcommissie wil naar aanleiding van de door de A-kandidaten afgelegde examens nog de volgende opmerkingen maken:

1. Men dient zich nauwkeurig uit te drukken; zo zegge men niet, dat een functie de X-as snijdt en spreke men niet van de extremen van een grafiek, evenmin als van de grafiek van een vierkantsvergelijking.
2. Enig begrip van irrationale getallen dient aanwezig te zijn, met name wanneer het keuze-onderwerp de overige stof van de klassen I-IV omvat.
3. Verscheidene kandidaten konden weliswaar twee vergelijkingen met twee onbekenden oplossen, maar begrepen niet, dat men ook van één vergelijking met twee onbekenden stellen wortels en zelfs veelal onbegrensd veel van zulke stellen kan vinden.
4. Indien aan een kandidaat, die de logaritmen en rijen als keuze-onderwerp had opgegeven, een logaritmentafel werd voorgelegd, betrok in de regel zijn gezicht zodanig dat de examinator neiging kreeg deze tafel maar weer op te bergen. Het is de bedoeling dat men in staat is er zeer eenvoudige berekeningen mee uit te voeren.
5. De kandidaten die de geschiedenis van de wiskunde of de statistiek gekozen hadden, bleken veelal zeer slecht voorbereid te zijn. Het had er soms de schijn van dat men zich beperkt had tot de bestudering van een enkel hoofdstuk.
6. Nogmaals wil de subcommissie er op wijzen, dat bij de planimetrie ook de beginselen van de goniometrie behoren. Dit houdt meer in dan de definities van sinus en cosinus. De sinusregel, alsmede het verband van deze regel met de straal van de omgeschreven cirkel, en de cosinusregel bleken bij velen onbekend te zijn. Dit geldt ook voor de toepassing van deze regels bij de berekening van lijnstukken.
7. Verscheidene kandidaten bleken geen definitie van gelijkvormigheid te kunnen geven en ieder begrip van vermenigvuldiging van figuren te missen.

Wat de B-kandidaten betreft, is het gemiddelde van de behaalde cijfers: voor de algebra 4,9 (v.j. 5,4), voor de stereometrie 5,1 (v.j. 5,4) en voor de goniometrie en de analytische meetkunde 5,4 (v.j. 5,0).

Wederom werd de subcommissie onaangenaam getroffen door het vaak onnodig overgaan op het grondtal 10 en door het differentiëren van goniometrische functies, waarvan het argument in graden was uitgedrukt.

Het dient bekend te zijn dat het kwadrateren van beide leden van een vergelijking of van een ongelijkheid slechts onder bepaalde voorwaarden geoorloofd is.

Om de afstand van twee kruisende rechten te bepalen is het vaak niet nodig om met een uitvoerige constructie de gemeenschappelijke loodlijn te bepalen. Als de éne lijn loodrecht op een vlak staat, waar de andere lijn in ligt of wanneer door de kruisende rechten twee evenwijdige vlakken zijn gebracht, kan men op veel eenvoudiger wijze de gevraagde afstand vinden.

Bij het derde vraagstuk van het schriftelijk werk voor de analytische meetkunde bleek, dat vrijwel alle kandidaten verzuimd hadden te onderzoeken of elk punt van de gevonden kromme aan de gestelde voorwaarde voldeed.

WIMECOS

VOORLOPIGE AGENDA VAN DE ALGEMENE VERGADERING VAN WIMECOS op dinsdag 29 december 1964 in „Esplanade", Lucas Bolwerk, Utrecht. Aanvang 10.30 uur.

1. Opening van de voorzitter, dr. ir. B. Groeneveld.
2. Notulen van de algemene vergadering van 27 december 1963 (zie dit nummer).
3. Jaarverslagen:
   a. van de secretaris (zie dit nummer),
   b. van de penningmeester,
   c. van de kascommissie (zie dit nummer),
   d. van de redactie van „Euclides" (zie dit nummer),
   e. van de commissie voor de leesportefeuille (zie dit nummer).
4. Décharge van de penningmeester en benoeming van de nieuwe kascommissie.
5. Bestuursverkiezing wegens periodiek aftreden van de heren drs. J. D. de Jong en drs. H. W. Lenstra; het bestuur stelt de heren drs. J. D. de Jong en Ir. C. van Vliet, leraar aan het Protestants Lyceum te Eindhoven, kandidaat.
6. Bespreking van het bestuursvoorstel om de contributie voor het verenigingsjaar 1964—1965 vast te stellen op f 9,—.
7. Voordracht van de heer prof. dr. B. van Rootselaar, hoogleraar aan de Landbouwhogeschool te Wageningen, over: Het getalbegrip bij Bernard Bolzano.

   PAUZE
8. Voordracht door een nog nader bekend te maken spreker.
9. Rondvraag.
10. Sluiting.

N.B. Deze mededeling geldt tevens als voorlopige convocatie voor de leden van Wimecos. Deze kunnen tot uiterlijk 15 november a.s. nieuwe agendapunten voorstellen bij de secretaris, Bosboomstraat 20, Arnhem.

VERSLAG VAN HET VERENIGINGSJAAR 1 SEPTEMBER 1963 — 31 AUGUSTUS 1964.

De vereniging telde op 1 september 1963 655 leden, op 31 augustus 1964 661 leden. De algemene vergadering werd gehouden op 27 december 1963 in „Esplanade" te Utrecht. De aftredende bestuursleden, dr. ir. B. Groeneveld en drs. J. F. Hufferman, werden herkozen; het bestuur werd met één lid uitgebreid door de verkiezing van drs. A. J. Th. Maassen. Het bestuur verdeelde de functies als volgt: voorzitter bleef dr. ir. B. Groeneveld, vice-voorzitter dr. P. G. J. Vredenduin; het secretariaat werd overgenomen door het nieuwe bestuurslid; tweede secretaris bleef drs. H. W. Lenstra, penningmeester drs. J. D. de Jong; leden van het bestuur waren de heren C. J. Alders en drs. J. F. Hufferman die — na negen jaar het secretariaat waargenomen te hebben — bereid bleek de vereniging als bestuurslid met zijn kennis en ervaring te blijven dienen.

Op de jaarvergadering hield prof. dr. A. C. Zaanen een voordracht over „De ontwikkeling van het integraalbegrip"; dr. M. Euwe sprak over „Programmering" en dr. L. N. H. Bunt over „Teaching Machines".

Op 24 december 1963 werd een brief verzonden aan de Minister van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen over de eindexamenregeling, waarvan de tekst in het februarinummer van de jaargang 1963/1964 van „Euclides" is afgedrukt.

Op 6 april werd te Utrecht het vijftiende Congres van Leraren in de Wiskunde en de Natuurwetenschappen gehouden; dit congres stond onder voorzitterschap van dr. P. G. J. Vredenduin; de heer Vredenduin verving de voorzitter van Wimecos, de heer Groeneveld, die verhinderd was dit congres zelf te leiden.

Op 24 en 25 augustus werd te Amsterdam de door het Mathematisch Centrum georganiseerde vakantiecursus gehouden met als onderwerp „Toegepaste Analyse"; de belangstelling van de zijde van de wiskundeleraren was minder groot dan andere jaren.

Het bestuur heeft in dit jaar vijf maal vergaderd.

De verhouding tot de zusterverenigingen was voortreffelijk.

NOTULEN VAN DE ALGEMENE VERGADERING VAN WIMECOS
op 27 december 1963 in „Esplanade" Utrecht.

De voorzitter opent te 10.30 precies de vergadering. Allereerst heet hij hartelijk welkom de genodigden dr. H. A. Gribnau, dr. D. N. van der Neut en drs. B. J. Westerhof, inspecteur van het V.H.M.O.

Evenzo de ereleden prof. dr. O. Bottema en dr. Joh. H. Wansink, de sprekers prof. dr. A. C. Zaanen, dr. M. Euwe en dr. L. N. H. Bunt.

Verder de redactiesecretaris van Euclides, drs. A. M. Koldijk en de vertegenwoordigers der zusterorganisaties D. Leujes (Liwenagel) en drs. H. C. Vernout (wiskunde werkgroep der W.V.O.).

Hij deelt mede dat bericht van verhindering is binnengekomen van: mr. ir. M. Goote, inspecteur-generaal van het onderwijs; dr. J. B. Drewes, raadadviseur in algemene dienst; dr. J. A. A. Verlinden, chef van de hoofdafdeling V.H.M.O.; dr. W. H. Capel, inspecteur V.H.M.O.; dr. J. J. van Hercke, secretaris-generaal van de commissie tot herziening van het M.O. in België; drs. A. J. S. van Dam, erelid; G. Boost (leesportefeuille); dr. J. Schweers, voorzitter van Velines en dr. S. R. van Asperen de Boer, secretaris van Velibi.

De presentielijst blijkt door 77 leden getekend te zijn. Daar de rede van de voorzitter gepubliceerd wordt in „Euclides", mag hiernaar verwezen worden.

De notulen van de vorige jaarvergadering en de jaarverslagen van de secretaris, de penningmeester, de kascommissie, de commissie voor de leesportefeuille en de redactie van „Euclides" worden goedgekeurd. Op voorstel van de kascommissie, bestaande uit de heren A. H. F. Saeys en drs. H. C. Vernout, wordt de penningmeester décharge verleend.

In de nieuwe kascommissie worden benoemd drs. H. C. Vernout en drs. A. M. Kokkelkoren.

Dan komt aan de orde de bestuursverkiezing. De aftredende bestuursleden dr. ir. B. Groeneveld en drs. J. F. Hufferman worden herkozen.

Nadat een bestuursvoorstel om het bestuur met één lid uit te breiden is aangenomen, wordt de heer drs. A. J. Th. Maassen te Arnhem gekozen.

De voorzitter deelt dan mede dat de heer Maassen het secretariaat op zich zal nemen.

Vervolgens leidt de voorzitter, aan de hand van de bestuursmededeling in het novembernr. van „Euclides", de vraag in hoe het bezoek aan de jaarvergadering bevorderd kan worden.

Hierop ontstaat een korte discussie.

De heer drs. H. Pleysier te Rotterdam stelt twee punten aan de orde:

a. eens in het zuiden van het land te vergaderen, bijv. in Eindhoven, waardoor meer contact met de Belgische collega's kan ontstaan. Ook zou hij gaarne eens

buitenlandse sprekers op de jaarvergadering horen, zoals bijv. bij het Wiskundig Genootschap het geval is.

b. verplichte aftreding van de bestuursleden na een zekere periode, bijv. na zes jaar. De voorzitter zegt overweging toe.

De heer dr. Joh. H. Wansink te Arnhem pleit ervoor om één algemene vergadering te Utrecht, dat zo centraal ligt, te houden, daarnaast zou een tweede algemene vergadering kunnen komen, in een andere, wisselende, plaats.

De heer drs. A. L. van der Maas te Gouda wil dat de jongere leraren opgewekt zouden worden door hun oudere collega's aan dezelfde school.

Bij een ingesteld onderzoek blijkt ongeveer de helft van de aanwezigen jonger dan 45 jaar te zijn.

Nu is het woord aan prof. dr. A. C. Zaanen, die spreekt over: De ontwikkeling van het integraalbegrip.

Nadat de voorzitter hem voor zijn helder, boeiend betoog hartelijk bedankt heeft, schorst hij de vergadering te 12.30.

Het ligt in de bedoeling de voordracht van prof. dr. Zaanen in „Euclides" te publiceren.

Te 14.15 wordt de vergadering hervat:

Achtereenvolgens spreken nu dr. M. Euwe over „Programmering" en dr. L. N. H. Bunt over „Teaching Machines". Ook deze sprekers zullen hun voordrachten bewerken voor publikatie in „Euclides".

Van de rondvraag maken de heren drs. B. J. Westerhof en drs. H. C. Vernout gebruik om te danken voor de uitnodiging deze vergadering bij te wonen. De eerste doet dit namens de inspecteurs, de tweede namens de besturen der zusterorganisaties.

Te plm. 16.30 sluit de voorzitter de vergadering.

VERSLAG VAN DE KASCOMMISSIE

Aan de ledenvergadering van de
Vereniging „WIMECOS"

Haarlem, 18 sept. 1964

Ondergetekenden A. M. Kokkelkoren en H. C. Vernout verklaren, dat zij op bovengenoemde datum de boeken van de penningmeester, de heer J. D. de Jong hebben gecontroleerd en in orde hebben bevonden.

Zij spreken hun grote waardering uit voor de wijze, waarop de financiën worden beheerd en te boek gesteld en zij stellen de vergadering voor de penningmeester décharge te verlenen over het in het afgelopen verenigingsjaar gevoerde beleid.

w.g. A. M. Kokkelkoren
H. C. Vernout

JAARVERSLAG VAN DE LEESPORTEFEUILLE VAN WIMECOS OVER 1963/1964.

Op dit ogenblik is het aantal lezers 38 (verleden jaar 38) die aan abonnementsgelden betaalden f 286,— (vorig jaar f 302,—; het jaar daar voor f 340,—).

De uitgaven bedroegen f 243,—, waarvan aan tijdschrift-abonnementen f 190,—. Hieruit blijkt dat de portefeuille zich nog steeds boven water kan houden.

Wel moet rekening worden gehouden met de zeer hoge porto-kosten die in de toekomst per 50 gram 10 ct. zullen bedragen (in 1961 nog 4 ct.).

Dit zou op te vangen zijn door de prijs per tijdschrift te brengen op f 2,50 (nu f 2,—).

Met vertrouwen zien wij echter het jaar 1964/1965 tegemoet.

w.g. G. J. J. Boost
1 oktober 1964.

REDACTIEVERSLAG 39e JAARGANG EUCLIDES

Aan de Besturen van Wimecos,
Liwenagel en de
Wiskundewerkgroep van de W.V.O.

In de vacature in de redactie ontstaan door het uittreden van Dr. Turkstra werd voorzien door toetreding van de heer G. Krooshof, die daartoe uitgenodigd was door de Wiskundewerkgroep van de W.V.O. Daardoor is de samenstelling van de redactie nu zoals indertijd werd overeengekomen: resp. 4, 2 en 2 leden aangewezen door Wimecos, Liwenagel en de Werkgroep.

Wat meer dan in vorige jaren werd aandacht geschonken aan de vernieuwing van het leerplan, maar de redactie is van mening dat dit in de komende jaargangen veel uitgebreider zal moeten geschieden. Gaarne zou de redactie dan ook bijdragen ontvangen die hieraan voldoen. De voorkeur wordt gegeven aan artikelen die moderne, mogelijk nieuwe stof op didactische wijze belichten. Zolang de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde nog niet heeft aangegeven waaruit de nieuwe stof zal bestaan, zal men slechts kunnen schrijven over onderwerpen, waarvan men verwacht dat ze tot de nieuwe leerstof zullen behoren of waarvan men zelf meent dat dit wenselijk is. Ook de discussie daarover kan vruchtbaar zijn. Uiteraard blijven didactische bijdragen over oude stof welkom.

De omvang van de jaargang bedroeg 320 pagina's verdeeld over 10 nummers. De medewerking van de firma P. Noordhoff was ook dit jaar zeer goed.

16 oktober 1964 Namens de redactie

De voorzitter, w.g. J. H. Wansink
De secretaris, A. M. Koldijk

WISKUNDE WERKGROEP VAN DE WERKGEMEENSCHAP VOOR VERNIEUWING VAN OPVOEDING EN ONDERWIJS (W.V.O.)

MODERNISERING WISKUNDELEERPLAN REGIONALE COMMISSIES

In het meinummer van het Mededelingenblad werd de vorming aangekondigd van een aantal regionale commissies ter bestudering van de vraag, hoe de moderne inzichten in het huidige wiskundeprogramma verwerkt zouden kunnen worden.

Naar aanleiding van de binnengekomen aanmeldingen stelt het bestuur zich voor onderstaande commissies in te stellen:

Commissie I,	Functiebegrip in de onderbouw b.v. Hengelo.
Commissie II,	Functiebegrip in de bovenbouw, waaronder differentiaal- en integraalrekening b.v. in Assen.
Commissie III,	Analytische meetkunde, evt. gebruik van vectoren, b.v. in Nijmegen.
Commissie IV,	Logica in de algebra en het begin van de meetkunde, b.v. in Den Haag.
Commissie V,	Stereometrische onderwerpen in de onderbouw, b.v. in Apeldoorn.
Commissie VI,	Wiskundige denkwijzen in andere vakken. Hiervoor was vrijwel geen belangstelling.
Commissie VII,	Meetkundige afbeeldingen, b.v. in Hilversum.

Het is natuurlijk niet noodzakelijk in genoemde plaatsen te vergaderen. Dit zal geheel aan de commissie worden overgelaten.

In alle commissies zijn nog plaatsen open. Zij, die dit nog niet deden, kunnen zich aanmelden bij de secretaris van de Wiskunde Werkgroep, Van Nouhuysstraat 11, Haarlem, onder vermelding van het(de) nummer(s) van de gewenste groep(en). Ook telefonische aanmelding is mogelijk via 02500-57288.

Het bestuur hoopt, dat vele leden, die, in maart de bijeenkomst met Professor Van der Blij bijwoonden, of die een van de vernieuwingscursussen gevolgd hebben alsnog aan deze oproep gehoor zullen geven. Het gaat hier om een poging tot modernisering van ons wiskundeonderwijs op korte termijn. Wil deze poging van de Werkgroep slagen, dan kan dat alleen, wanneer allen die belangstelling hebben, hieraan hun medewerking geven.

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossing en correspondentie over deze rubriek gelieve men te richten aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Kneppelhoutweg 12, Oosterbeek.

120. Gegeven is een vierkant „dambord" met $(2n)^2$ velden. De twee velden in de rechter boven- en in de linker onderhoek worden verwijderd. Tracht het veld met dominostenen te bedekken, die elk twee velden beslaan. In figuur 1 is ter verduidelijking een begin van een poging weergegeven. In deze figuur is $n = 3$ gekozen; gevraagd wordt echter een oplossing te zoeken voor willekeurige n.

121. Welke verschillende (d.w.z. niet isomorfe) ringen met vier elementen zijn er? Wellicht ten overvloede zij vermeld, dat een ring een normale optelling bezit en een vermenigvuldiging, die associatief is en waarvoor geldt $a(b + c) = ab + ac$ en $(a + b)c = ac + bc$. Niet vereist is dus, dat de vermenigvuldiging een eenheidselement heeft en dat ze commutatief is. (Een voorbeeld, dat aan de opgave voldoet, wordt gevormd door de restklassen modulo 4.)

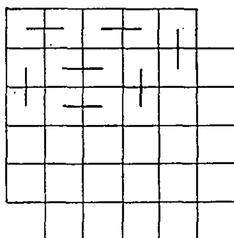


Fig. 1.

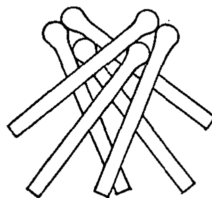


Fig. 2.

OPLOSSINGEN

(zie voor de opgaven het vorige nummer)

118. Het laadje met het etiket „drie witte" noemen we kortweg laadje www; de andere noemen we wwz, wzz en zzz.

a. Trek uit wwz een zwarte knikker en uit wzz twee zwarte. Dan bevat wzz drie zwarte, wwz een witte en twee zwarte, www twee witte en een zwarte en zzz drie witte.

b. Kies willekeurig een laadje b.v. www. Trek hieruit de drie knikkers. Blijken deze nu b.v. te zijn wit, zwart, zwart, dan nemen we het laadje wzz en onderzoeken de drie knikkers daarin. Het doet er niet toe, wat we nu vinden. Uit het gegeven, dat elk laadje een verkeerd etiket heeft, volgt dan wat de inhoud van de beide overige laadjes is.

Men zou nu kunnen proberen, of het op een listige manier mogelijk is, met vijf trekkingen te volstaan. Door systematisch de mogelijkheden af te tasten, vindt men, dat dit niet altijd lukt.

119. In figuur 2 liggen de drie naar links gerichte lucifers in één vlak, de drie andere in een vlak daarboven.